Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie

Catherine Houdement, Alain Kuzniak

CATHERINE HOUDEMENT ET ALAIN KUZNIAK

PARADIGMES GÉOMÉTRIQUES ET ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE

Abstract. Geometrical Paradigms and Geometry Teaching.
One of the first aim of geometry teaching is certainly that a student can build his/her own proper and effective geometrical working space. Then s/he can understand and solve geometry problems by using this space. But, the problem's interpretation is depending on different geometrical paradigms which are related to the kind of institutions -schools but also countries- where geometry is taught. From the diversity of paradigms it results a great diversity of working spaces: that explains a big number of didactic misunderstandings. In the paper, we clarify the notions of geometrical paradigm and working space. Then we show the possible interest of using and developing these tools for studies in geometry didactics.

Résumé. L'enseignement de la géométrie a pour fonction première de permettre à l'élève de se construire un espace de travail géométrique efficace. Grâce à cet espace, il peut comprendre et résoudre des problèmes de géométrie. Mais l'interprétation des problèmes va dépendre de paradigmes géométriques qui diffèrent suivant les institutions (écoles mais aussi pays) où s'effectue l'enseignement. Cette diversité des paradigmes entraîne une diversité des espaces de travail et explique un certain nombre de malentendus didactiques. Dans cet article, nous précisons les notions de paradigmes et d'espace de travail géométriques. À partir d'exemples, nous montrons l'intérêt d'envisager des études didactiques utilisant et développant ces outils.

Mots-clés. Didactique, géométrie, paradigmes, espace de travail, enseignement.

Introduction

Pourquoi s'intéresser aujourd'hui à l'étude de la géométrie ? Elle semble délaissée dans l'enseignement français : peu pratiquée à l'école primaire, considérée par les maîtres comme un objet complexe et aride rejeté par les élèves quand ils arrivent au collège, elle semble s'évanouir au lycée où seuls les élèves des sections scientifiques continuent à résoudre quelques problèmes de géométrie. Simultanément, elle constitue traditionnellement le socle et l'enjeu de la construction de la démonstration. Elle continue de faire l'objet de rapports de commissions savantes : Commission Kahane en France (Kahane dir, 2002), Royal Society en Grande Bretagne. Ces dernières insistent sur son aspect nécessaire et

ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES, volume 11, p. 175 – 193.

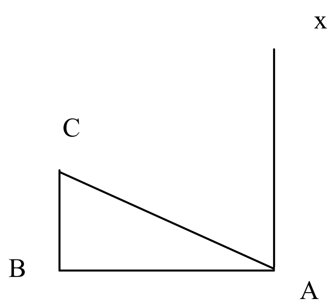
fondateur dans l'éducation du citoyen. Cette dichotomie n'est pas nouvelle et rappelle les débats qui ont traversé l'histoire de son enseignement.

Ainsi, la géométrie élémentaire et son enseignement paraissent en crise mais d'où vient cette impression et plus précisément quel regard peut-on porter sur l'enseignement actuel de la géométrie ? Et sur quoi fonder ce regard ? Ces questions ont guidé notre recherche et nous ont conduits à développer un certain nombre d'outils comme les paradigmes géométriques et les espaces de travail géométriques. Nous souhaitons montrer ici comment ces outils peuvent enrichir à la fois le regard porté sur l'enseignement de la géométrie et engager de nouvelles recherches en didactique.

1. Un exemple prototypique

L'étude des connaissances d'un public d'étudiants professeurs (généralistes ou spécialistes) est révélatrice d'un état de l'enseignement des mathématiques. Ces étudiants sont en effet à la charnière entre plusieurs institutions. En France, leurs connaissances à l'entrée de la formation résultent d'un long séjour à l'école obligatoire complété par au moins trois années en université, dans une filière quelconque pour les professeurs d'école, dans une filière scientifique pour ceux de collège et lycée[1]. Leurs connaissances à la sortie de la formation doivent leur permettre d'aborder avec sérénité et efficacité l'enseignement des mathématiques de 6 à 11 ans pour les professeurs des écoles, de 11 à 18 ans pour ceux de lycée.

Considérons l'exercice suivant extrait de l'épreuve de mathématiques d'un concours de recrutement de professeur des écoles.



On donne le triangle ABC rectangle en B tel que AB = 4 cm et BC = 2 cm. La demi-droite [Ax) est perpendiculaire à la droite (AB). M est un point de la demi-droite [Ax). Le but de ce problème est d'obtenir des configurations particulières du triangle AMC.

<u>Question 5.b.</u> Existe-t-il un point M tel que le triangle ACM soit équilatéral ? Justifiez.

[1] En France, les professeurs des écoles ont vocation à enseigner toutes les disciplines de la maternelle au CM2, à des enfants de 3 à 11 ans (3 ans de maternelle : de 3 à 6 ans, 5 ans d'élémentaire : de 6 à 11 ans). Les professeurs de collège sont en général spécialistes de leur discipline.

Et examinons la réponse d’un candidat.

> « Pour savoir si le triangle ACM est équilatéral, on peut essayer de construire ce triangle sur la figure à l'aide du compas. On place la pointe du compas en A et on prend une ouverture équivalente à la valeur AC, on trace l'arc de cercle sur la demi-droite [Ax). On procède de la même manière en mettant la pointe du compas en C. On se rend compte que le sommet n'est pas sur [Ax) donc le triangle n'est pas équilatéral. »

Une construction effective avec des outils résout par la négative la question posée et ceci grâce à l'utilisation du compas. L'étudiant n'en reste pas là et il éprouve le besoin de justifier cette première affirmation. Il développe alors un raisonnement déductif qui s’appuie sur la seule utilisation d’instruments de mesure, sans recours à la construction.

> « Ceci peut s'expliquer par le fait que dans un triangle équilatéral, les angles sont égaux et leur somme vaut 180°. Chacun vaut 60°. Dans ce cas lorsqu'on mesure grâce à un rapporteur, on remarque que CÂM est supérieur à 60°, CÂM=64°. »

Plaçons-nous maintenant du côté du correcteur : si ce dernier est un professeur de collège ou de lycée, il refusera la réponse sous prétexte qu’elle s’appuie, par deux fois, sur une expérience dans le monde sensible. En effet, les programmes français préconisent l’usage, dès la quatrième de collège (13 ans), de justifications détachées de la figure. Si le correcteur est un professeur des écoles, il pourra accepter cette réponse, reconnaissant l’effort de déduction et s’appuyant sur le fait qu’à l’école les constructions aux instruments jouent un rôle constitutif des connaissances.

L’effort de formation des futurs professeurs des écoles consistera donc à leur permettre d’une part de connaître et de comprendre les enjeux géométriques de chaque niveau scolaire, et d’autre part d’anticiper ceux attendus par le concours. Notre recherche, limitée à l’étude de la géométrie élémentaire de l’espace euclidien, vise à expliciter les diverses significations du terme unique de *géométrie*.

2. Une analyse en termes de paradigmes

Dans l’histoire des mathématiques, le rôle joué par la géométrie a évolué. A l’origine, elle s’est construite comme une technologie de l’espace pour résoudre des problèmes spécifiques comme les problèmes d’astronomie ou d’arpentage et ceci dans des communautés spécialisées (par exemple les harpénodaptes égyptiens). Des preuves visuelles ou des constructions matérielles suffisent alors à convaincre les géomètres de l’évidence de leurs résultats. Les *Éléments d’Euclide* (environ 300 avant J.C) marquent, d’après Szabó (1993), une inflexion décisive qui portent les géomètres grecs à refuser la simple vérification visuelle et l’évidence intuitive. Les *Éléments* partent ainsi « *de premiers principes s’imposant à nous par l’intuition mais impossibles à démontrer, pour aboutir à des vérités que l’on peut* *ainsi connaître par le seul moyen du raisonnement* » (Dhombres et al, 1987, p. 236). Par la suite, les géomètres grecs envisagent les objets géométriques « en soi » et non plus leurs traces matérielles visibles. La géométrie se reconstitue en un corps de savoirs, basé sur des axiomes et organisé par le raisonnement hypothético-déductif. Par cette véritable mutation, elle est même devenue la quintessence de l'activité mathématique. Au XIX^e, la discussion sur la nature des axiomes et sur les fondements de la géométrie a favorisé l'avènement des géométries non euclidiennes et l'émergence d'une approche encore plus abstraite de la géométrie : le Programme d'Erlangen (1872) et son structuralisme naissant énonce clairement l'avènement de cette nouvelle conception.

La fécondité des crises et la genèse des nouveaux problèmes qu'elles ont engendrés ont rendu pour nous nécessaire l'introduction de la notion de paradigme avec le sens que lui donne Kuhn (1962) dans son ouvrage sur les révolutions scientifiques. Nous retiendrons en particulier deux facettes de ce concept.

1) Le mot paradigme, dans son aspect global, désigne l'ensemble des croyances, des techniques et des valeurs que partage un groupe scientifique. Il fixe la manière correcte de poser et d'entreprendre la résolution d'un problème. Dans ce sens, Kuhn parle aussi de matrice disciplinaire qui permet de regrouper les théories et plus généralement les connaissances d'un groupe qui travaille sur le même sujet ;

2) Dans un deuxième sens plus local, Kuhn utilise aussi le terme de paradigme pour caractériser les exemples significatifs qui sont donnés aux étudiants pour leur apprendre à reconnaître, à isoler et à distinguer les différentes entités constitutives du paradigme global. Cela renvoie à la pratique par les individus de leur champ disciplinaire.

Cette vision présente l'avantage de concilier deux composantes de la formation d'enseignants. Le premier point rappelle l'intégration dans le paradigme des croyances à des savoirs partagés par une communauté scientifique. Le second intègre une perspective d'enseignement du paradigme en faisant référence aux pratiques qui en sont constitutives.

Nous avons posé en hypothèse le fait que :

> « Dans l'enseignement, des paradigmes différents sont englobés sous le terme unique de géométrie. Ces différents paradigmes rendent compte de la rupture souvent « dénoncée » dans l'enseignement français entre les différents cycles. »

Ces paradigmes sont globaux et consistants : chacun d'entre eux définit une forme élaborée de géométrie. D'où une seconde hypothèse :

> « Étudiant(e)s, professeur(e)s, enseignant(e)s et élèves se situent implicitement fréquemment dans des paradigmes différents : cette différence de posture épistémologique est source de malentendus didactique. »

3. Les paradigmes de la géométrie enseignée

Nous allons préciser les trois paradigmes géométriques que nous avons mis en évidence dans notre étude. Les travaux de Gonseth (1945-1952) nous ont fourni une base essentielle pour la recherche d'une épistémologie sous-tendue par les paradigmes. Ces travaux tentent également d'analyser la pensée inhérente à chaque paradigme suivant trois modes : l'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif, que nous allons préciser.

3.1. Les modes de pensée

« *Être géomètre signifie ne pas confondre une évidence issue de l'intuition avec un renseignement expérimental, le résultat d'une expérience avec la conclusion d'un raisonnement. C'est ensuite décider, en principe, du crédit à accorder à chacune de ces fonctions de la pensée*. » Gonseth (1945, p. 72).

3.1.1. L'intuition

Suivant Fischbein (1987), l'intuition fournit au sujet une sorte de théorie première basée sur un lot d'évidences, qui gomme les incertitudes et qui permet au sujet de structurer une situation en un tout complet, cohérent qu'il utilise comme socle pour son raisonnement. Cette structuration des faits par l'intuition implique en particulier qu'elle ne se confond pas avec la perception, même si les premières intuitions géométriques sont généralement perceptives. Simultanément l'intuition peut être aussi une formidable source d'erreurs car elle peut installer une cohérence artificielle entre des données pratiques ou théoriques.
L'intuition n'est pas stable, elle évolue avec le sujet grâce à un ensemble d'expériences et donc de connaissances *a posteriori*. Il faut voir l'intuition structurée au niveau de l'individu en un ensemble de strates qui se superposent et font oublier les premières intuitions. Certaines de ces strates seraient communes à tous les individus ; c'est le travail des psychologues de les mettre en évidence (théorie des stades). D'autres dépendraient de la pratique du sujet et seraient dépendantes du passé scolaire ou professionnel.

3.1.2. L'expérience

L'expérience s'oppose à l'intuition dans la mesure où elle n'est pas immédiate : une action physique ou mentale est nécessaire pour découvrir ou valider telle proposition.
La nature de l'expérience géométrique dépend des objets sur lesquels elle s'exerce. Pliages, découpages et constructions à la règle et au compas constituent la base de cette approche expérimentale, qui peut déjà être développée à l'école. Les instruments peuvent être plus complexes : les simulations informatiques qui opèrent sur des objets virtuels, obtenues grâce à certains logiciels (Cabri-géomètre

ou Logo), permettent de découvrir des alignements, des positions relatives de droites ou des lieux géométriques.
Une autre forme d'expérience peut être mentale, *experimental thought*, elle consiste à mettre en œuvre mentalement des déplacements, des découpages sans les effectuer réellement.
Dans notre approche, l'expérience nourrit l'intuition ; quant à l'intuition, elle structure l'expérience. Ainsi, nous reprenons l'exemple de Fischbein : quand un enfant affirme qu'une droite peut être indéfiniment prolongée, il exprime une intuition ; mais cette intuition est relative à une expérience, éventuellement virtuelle, menée antérieurement devant lui.

3.1.3. Le raisonnement déductif

Il est le mode de pensée le plus valorisé dans les pratiques mathématiques bourbakistes. Mais, dans notre propos, il importe de ne pas le réduire à la démonstration basée sur des axiomes bien définis et en nombre réduit. Nous l'utiliserons sous une forme plus universelle en disant que, certaines connaissances étant considérées comme acquises, le raisonnement déductif consiste à en tirer d'autres qui en sont les conséquences, sans recours à l'expérience ou à toute autre source extérieure.
De nombreux mathématiciens ont souligné la nécessaire relation entre intuition et déduction. Citons la métaphore très audacieuse de Thom[2] : « *La déduction est à l'aveugle ce que l'intuition est au paralytique, l'une avance et ne voit pas, l'autre voit mais n'avance pas.* »

Ces trois modes sont constitutifs de la pensée géométrique, mais ils se développent différemment dans chaque paradigme.

3.2. La Géométrie I ou « géométrie naturelle »

La Géométrie I a pour source de validation la réalité, le sensible. Le qualificatif de « naturelle » que nous lui avons attribué à la suite de Gonseth veut refléter l'existence d'une relation au réel, mais en aucun cas il ne comporte de référence à l'idée de nature opposée à celle de culture. La Géométrie I correspond déjà à un effort d'abstraction du réel, dans la mesure où la pensée sélectionne pour s'exercer certains aspects des objets s'ils sont matériels ou les traduit en schémas (Caveing, 1997), comme par exemple les figures simples (cercles, carrés...). L'intuition, l'expérience et le raisonnement déductif s'exercent sur des objets matériels, ou matérialisés, grâce à la perception ou la mise en œuvre d'expériences mécaniques réelles comme le pliage, le découpage ou leur pendant virtuel. En ce sens la géométrie d'Euclide n'est pas de la Géométrie I ; il s'agit plutôt de celle de la

[2] Cité par LARGEAULT J. (1993) *Intuition* et *Intuitionnisme,* Vrin.

première partie du traité de Clairaut (ou dans certains cas de Legendre) où la déduction peut être liée à une expérience mécanique et où l’esprit doit se libérer de la démonstration de choses évidentes.

3.3. La Géométrie II ou « géométrie axiomatique naturelle »

Dans cette Géométrie la source de validation se fonde sur les lois hypothético-déductives dans un système axiomatique aussi précis que possible. Mais le problème du choix des axiomes se pose. La relation avec la réalité subsiste encore dans cette Géométrie, dans la mesure où elle s’est constituée pour organiser les connaissances géométriques issues de problèmes spatiaux.
L’axiomatisation proposée est certes une formalisation, mais elle n’est pas formelle car ici la syntaxe n’est pas coupée de la sémantique qui renvoie à la réalité. D’où la conservation du qualificatif de « naturelle ».
La Géométrie II peut s’exercer moyennant une axiomatisation partielle, voire des îlots d’axiomatisation.

3.4. Géométrie III ou « géométrie axiomatique formaliste »

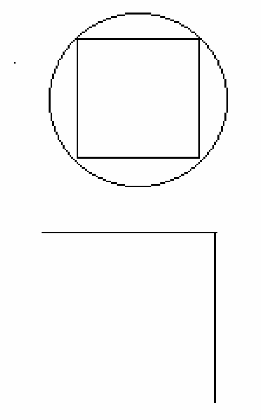
Dans cette Géométrie, qui naît à la suite de l’apparition des géométries non-euclidiennes, le cordon ombilical qui liait la géométrie et la réalité est coupé. Les axiomes ne sont plus fondés sur le sensible et la primauté du raisonnement logique l’emporte. L’approche axiomatique formaliste est bien explicitée par l’affirmation de Wittgenstein (1975, p. 205) qui clôt le débat entre géométrie et réalité : « *Les axiomes d’une géométrie peuvent ne contenir aucune vérité* ».
Une différence essentielle avec la Géométrie II porte sur la complétude du système d’axiomes : en Géométrie III, l'axiomatisation n’est plus partielle.

4. Mise en fonctionnement des paradigmes

4.1. Exemples à l’école primaire

La reproduction de figures est un type de tâches géométriques habituel à l’école primaire. Il fait même partie des items évalués lors des évaluations nationales de 6^{e} (élèves de 11 ans).

Considérons l’exemple suivant :



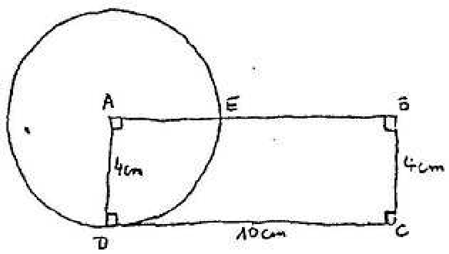
Voici une figure composée d'un carré et d'un cercle.
Vous devez la reproduire, la figure est déjà commencée : deux côtés du carré sont déjà tracés.

Résultats corrects (1997).
Pour le carré : 94,3%
Pour le cercle : 63,6%

La construction du carré peut se faire avec différents instruments : en utilisant deux fois l'équerre ou le compas et la règle non graduée ou la seule règle graduée avec du tâtonnement… Une expérience permet donc de réussir.
La construction du cercle repose sur celle du centre, non marqué sur la figure initiale. Celui-ci peut difficilement être approché précisément par tâtonnement ; il est nécessaire de raisonner pour le déterminer : le centre est le point de rencontre des diagonales (ou des médianes) du carré déjà tracé.
Il est à signaler que Duval (2005) a grandement enrichi ces modes de pensée par le changement de dimensions dans l'approche opératoire des figures.

La validation se fait par superposition à la figure de départ ; les objets travaillés sont les dessins, traces graphiques d'objets textuels. Le travail est tout entier situé en Géométrie I, croisant expérience et raisonnement, sans doute supportés par l'intuition.

Considérons cet autre exemple extrait de l'évaluation sixième de 1998.



Sur ce dessin à main levée, on a représenté un rectangle ABCD et un cercle de centre A qui passe par D. Les mesures réelles sont en centimètres.
Ce cercle coupe le segment [AB] au point E.
Trouve la longueur du segment [EB].
………………………………
Explique ta réponse : ……………….
…………………………………

Réponses obtenues	Résultats des élèves
Réponse attendue : 6 ou 6 cm avec ou sans explication	25 %
Longueur mesurée sur le dessin (environ 3,6 cm)	40 %
Autres réponses	25 %
Non réponses	10 %

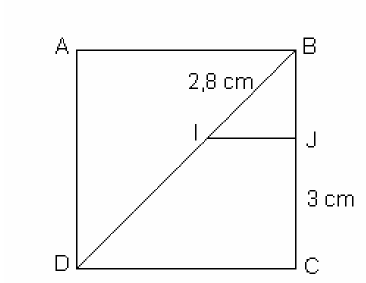
Le travail demandé est, par convention, en Géométrie II, mais beaucoup d’élèves restent en Géométrie I en prélevant les informations sur le dessin (mesures en contradiction avec les informations textuelles). Ils concluent par une expérience ou une perception en Géométrie I alors qu’une déduction en Géométrie II est attendue par les concepteurs de l’épreuve.

Nous interpréterons plus loin les réponses erronées comme l’utilisation d’une « mauvaise » composante (référence à la Géométrie I au lieu de la Géométrie II) dans l’espace de travail.

4.2. Exemple au collège : des droites « presque » parallèles

Considérons le texte suivant, extrait d’un article de *Petit x* (Jacquier, 1995). Il s’agit des deux premières questions d’un exercice de Brevet des collèges donné dans l’académie de Nice en 1991.

> Construire un carré ABCD de côté 5 cm.
> 1) Calculer BD.
> 2) Placer le point I de [BD] tel que BI=2,8 cm puis le point J de [BC] tel que JC=3 cm.
> La droite (IJ) est-elle parallèle à la droite (DC) ?



La difficulté de cet exercice réside, pour la question 2), dans une confrontation directe entre l’évidence intuitive fournie par le dessin effectué par l’élève (les droites sont parallèles) et les conclusions attendues contraires (les droites ne sont pas parallèles) tirées de calculs sur les mesures données. L’élève, par la demande de la construction d’un carré, est incité à se confronter au réel du graphisme représentant le carré. Par l’incitation au calcul d’une mesure de la question 1), en général, il change d’horizon et bascule dans la théorie où le théorème de Pythagore lui permet de produire la réponse exacte attendue (réponse qu’il eut pu obtenir, en valeur approchée, en mesurant à la règle BD). Mais le début de la question 2), placer effectivement I sur le dessin, le replonge dans le monde des constructions : quelle attitude développera-t-il alors pour répondre à la question du parallélisme ? À l'œil les droites sont parallèles, ce parallélisme résiste à l'utilisation d'instruments et est en conformité avec la comparaison des valeurs approchées des rapports $\frac{BI}{BD}$ et $\frac{BJ}{BC}$. Ce qui fait écrire à certains élèves de 13 ans : « *Je ne sais pas si elles sont parallèles car si on arrondit* $\frac{BI}{BD}$*, c'est égal, mais comme (seule) la valeur exacte justifie si deux droites sont parallèles, alors je ne peux pas dire si elles sont parallèles* », ou encore « *Les droites (IJ) et (DC) sont parallèles si on prend l'arrondi, mais elles ne sont pas parallèles si on prend la valeur exacte* ».

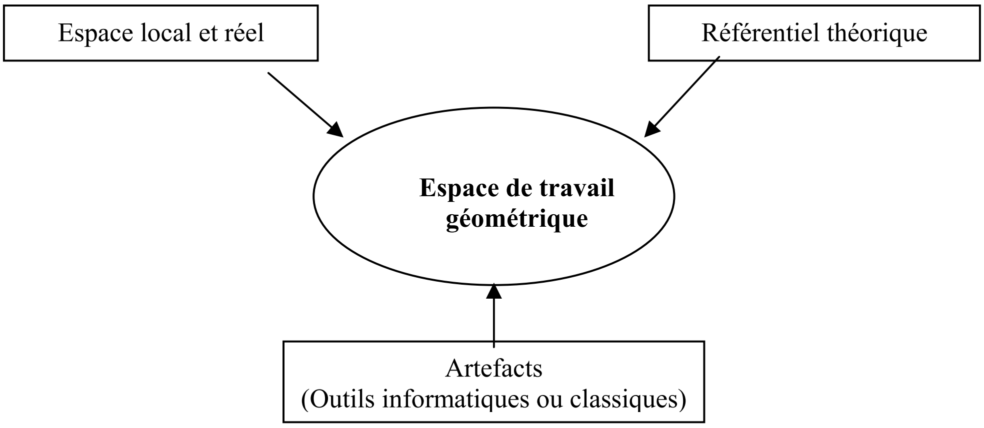
Nous interpréterons ces réactions comme une ambiguïté ressentie par les élèves quant au choix de l'espace de travail dans lequel se placer, défini notamment par le paradigme licite. Pour les questions de construction, le paradigme licite est celui de la Géométrie I où existent nécessairement des mesures approchées, notamment celles lues sur les instruments. Mais pour la réponse à la question 2), où se placer ? En Géométrie I et alors les droites sont parallèles. Ou en Géométrie II où les mesures ne se lisent pas sur les instruments, n'existent que par leur valeur exacte, ce qui conduit à déduire que les droites ne sont pas parallèles ?
La notion d'espace de travail que nous précisons dans le paragraphe suivant est un élément de réponse à cette question.

5. La notion d'espace de travail

Les exemples précédents mettent en relation l'activité propre de l'apprenti géomètre, pour lequel l'espace de travail à utiliser peut déjà poser question, et celle du géomètre, qui saura d'emblée choisir l'espace de travail adapté. Cette activité suppose donc l'existence d'un environnement particulièrement complexe constitué d'objets visibles et tangibles comme les dessins, d'outils matériels comme les instruments de dessin et d'outils conceptuels comme les définitions ou les théorèmes. En réalité s'y insèrent aussi des ensembles de nombres, mais nous n'entrerons pas plus avant dans les aspects numériques.
Nous désignerons sous le terme d'espace de travail géométrique (ETG), l'environnement organisé par et pour le géomètre de façon à articuler, de façon idoine, les trois composants suivants :

- un ensemble d'objets, éventuellement matérialisés dans un espace réel et local ;
- un ensemble d'artefacts qui seront les outils et instruments mis au service du géomètre, et enfin ;

– un référentiel théorique éventuellement organisé en un modèle théorique.



Les paradigmes géométriques que nous avons introduits servent de référence, d'horizon qui permet d'interpréter les contenus des composants et de définir leurs fonctions (par exemple heuristique ou validation), fonctions elles-mêmes constitutives des paradigmes. Nous serons souvent confrontés à cet apparent paradoxe qui fait définir comme géométrique la fonction d'un objet lorsqu'il intervient dans une géométrie que nous essayons justement de mieux définir.
Le fait que la nature des composantes dépende du paradigme de référence conduit à envisager l'existence d'espaces de travail spécifiques associés à chaque paradigme, nous parlerons alors **d'espace de travail géométrique de référence**.

Le travail dont nous parlons en géométrie, renvoie à une conception généralisée de cette notion : le travail[3] est vu comme l'établissement d'un rapport entre un contenu et une forme. Dans notre cas, le contenu est lié à une matière visible et la forme est déterminée par le modèle de référence. Le travail ne doit pas nécessairement déboucher sur la production d'objets concrets, il s'agit d'une activité intellectuelle où l'individu organise, d'une certaine manière et avec son style propre, les relations entre objets empiriques et théoriques.

5.1. Espace et objets géométriques

Les objets géométriques sont un constituant essentiel de l'espace de travail géométrique et les différents points de vue sur leur nature exacte dépendent à la fois du modèle théorique qui les définit et de l'espace support dans lequel ils se trouvent. Dans la vision abstraite de la Géométrie III, l'espace est constitué de

[3] GRANGER G.G. (1968) Essai sur une philosophie du style, p. 5 et sq., Armand Colin, Paris.

points, de droites et de plans dont les relations sont explicitées par le modèle. Ce regard permet d'introduire les sous-parties de l'espace comme des ensembles de points. Dans la géométrie axiomatique naturelle (Géométrie II), certaines sous parties de l'espace sont en fait les objets de l'étude et l'on parlera de figures ou de configurations. En Géométrie I, il s'agit de dessins ou de maquettes.
Dans la géométrie enseignée, la nature du support utilisé ainsi que l'utilisateur privilégié de ce support sont des points particulièrement intéressants à observer pour déterminer les ETG et distinguer l'espace de travail de l'élève de celui du professeur. Ainsi, par exemple, qui utilise le tableau et comment ?
L'espace qui intervient en géométrie se construit en étroite relation avec l'espace réel qu'il reconstruit ou qu'il dévoile de manière différente suivant les divers paradigmes. L'espace dont nous parlons ici s'apparente à ce que Malafosse (2002, p. 44) décrit sous le nom d'espace de la réalité c'est à dire *un ensemble composé des objets réels et des événements existant hors de la pensée du sujet, et sur lequel portent à la fois l'activité psychique des individus et l'activité de réflexion des communautés culturelles.*

5.2. Les artefacts

Nous utilisons le mot artefact dans le sens que lui donne Rabardel (1995) de chose ayant subi une transformation d'origine humaine visant une finalité. En géométrie, ces choses sont notamment les outils et les instruments tels que règle, équerre, mais aussi pliage… Rabardel précise qu'un instrument est un artefact pris en main par un individu grâce à des schèmes d'action. L'intérêt de cette approche est d'attirer l'attention sur le processus de genèse instrumentale qui transforme un artefact en instrument avec une double orientation : l'instrumentalisation orientée vers les usages de l'artefact et l'instrumentation tournée vers l'appropriation par le sujet des schèmes d'action.
Les artefacts sont une composante déterminante de l'espace de travail puisqu'ils en constituent la face la plus visible et la plus prégnante pour l'élève. En réalité les choix et les usages de l'artefact (donc l'instrumentalisation) sont réglés par le paradigme dans lequel il s'insère. Dans le cadre euclidien classique, on sait l'importance des constructions à la règle et au compas : l'essentiel est ici la justification théorique d'une technique de construction. La règle n'est pas graduée et la précision de la construction importe peu, la Géométrie II se différencie ainsi radicalement de la Géométrie I où la réalisation finale du dessin est essentielle. Inversement le choix des artefacts, notamment à l'occasion de construction, peut aussi implicitement définir le paradigme visé.
L'introduction de nouveaux outils de type informatique a bouleversé les artefacts utilisés : l'apprentissage de nouvelles instrumentations (notamment la fonction dragging des logiciels dynamiques) a créé, de fait, des nouveaux espaces de travail. Cette dernière remarque nous permet d'insister sur le fait que, même dans un

paradigme géométrique donné, les espaces de travail géométriques peuvent être multiples ; c’est une source de difficultés supplémentaires.

5.3. Le référentiel théorique

Les objets et les artefacts de la géométrie en constituent la partie empirique, celle-ci ne prendra tout son sens qu’articulée avec un ensemble de définitions, de propriétés, de relations réunies dans une sorte de référentiel théorique que l’on peut aussi regarder comme un modèle théorique. Le sens du mot modèle oscille entre concret et abstrait, réalisation matérielle et norme abstraite. Cette oscillation reflète la distinction entre les différents paradigmes que nous étudions. Dans ce qui suit, nous appellerons modèle théorique le modèle abstrait qui résulte soit d’une modélisation, soit d’une définition *a priori*.

Dans le premier cas, le modèle théorique résulte d’un processus de modélisation par schématisation et idéalisation du monde réel dont il cherche à rendre le plus fidèlement compte. La géométrie axiomatique classique entre dans cette description.

Dans le deuxième cas, le modèle théorique préexiste et ce qu’on appelle modèle est cette fois une interprétation (et souvent une création) qui doit rendre compte des objets et des propriétés définis par les axiomes. Cette interprétation pourra s’appuyer sur une représentation matérielle ou virtuelle destinée à donner du sens à un système d’axiomes et d’énoncés qui est donné *a priori*. La géométrie de type formaliste (Géométrie III) entretient ce rapport au modèle théorique. Ceci apparaît nettement dans les nombreux « modèles matériels » créés pour rendre compte des axiomes décrits par Hilbert, quand on ne retient pas l’axiome d’Archimède ou quand on nie l’axiome du parallélisme (rappelons, sans le développer, l’exemple du modèle de Klein pour la géométrie hyperbolique).

Dans un sens plus restreint, il faut noter que le « modèle » peut aussi désigner une réalisation matérielle d’une figure géométrique : il pourra alors exister une confusion entre le travail sur l’objet réel et l’objet idéal.

Le référentiel de la Géométrie I, au moins dans sa pratique élémentaire, paraît ne se référer à aucune structuration en un modèle théorique, sauf à y admettre des « définitions sensibles ». Il est ainsi possible de développer au sein de ce paradigme un modèle de référence, comme l’a fait par exemple Hjelmslev (1939).

> « La géométrie que nous proposons dans ce qui suit doit avoir comme but le contrôle sensible de tous les résultats. Les définitions doivent être des définitions sensibles : c’est-à-dire décrire les objets dont on s’occupe de telle façon qu’on puisse reconnaître par une vérification directe si les objets ont les propriétés démontrées.
> Le programme de travail est : voir et concevoir. »

Dans cette géométrie, par exemple, une droite n'est pas tangente en un point à un cercle mais sur une portion de cercle. Le but de Hjelmslev est de définir précisément cette géométrie étroitement liée au monde physique.

6. Construire l'espace de travail

L'espace de travail ne prend son intérêt et ne devient opérationnel que lorsqu'il est possible de mettre en réseau et de donner du sens aux trois composantes que nous venons de dégager. L'expression « espace de travail » prédéfinie par ses trois composantes ci-dessus, peut paraître bien ordinaire. Mais cette métaphore n'est pas innocente. Tout d'abord l'espace en question est un espace local, un « lieu » au sens usuel. Mais c'est un lieu à installer, à adapter pour y optimiser le traitement de la tâche géométrique. En cela nous nous approchons des architectes ergonomiques.

6.1. Le point de vue de l'architecture ergonomique

De manière prosaïque les architectes définissent les espaces de travail comme des lieux à construire pour que l'utilisateur puisse y exercer au mieux son travail (Lautier, 1996). Chacun investit cet espace à sa façon : l'ouvrier spécialisé se limite à une appropriation locale quand il ne veut connaître que sa machine outil, le chef d'équipe élargit son appropriation de l'espace quand il envisage le processus global de production de son atelier. De même, un objet aura des valeurs et des fonctions différentes selon la place hiérarchique occupée par l'utilisateur : ainsi dans une manufacture, la passerelle des cadres devient un balcon de surveillance pour les ouvrières qui s'en protègent par des cartons.
Les architectes doivent penser cet espace de travail dans ses multiples fonctions utilitaires mais aussi sociales. Afin de pouvoir le structurer et éventuellement le modifier, Lautier analyse l'espace du travail suivant trois grands axes : un dispositif matériel, une organisation laissée à la charge du concepteur de l'espace et enfin une représentation qui prend en compte la façon dont les utilisateurs intègrent cet espace.

6.2. Les différents types d'ETG

Ainsi, l'étude d'un espace de travail doit passer par l'analyse de l'organisation de ses composantes élaborée pour donner à cet espace une efficacité maximale dans une institution donnée. Mais cette étude doit aussi s'intéresser aux adaptations opérées par les individus qui effectuent un travail de géométrie. Cela conduit à considérer différents types d'ETG que nous décrivons ci-dessous.

ETG de référence. Nous avons déjà introduit (§ 5) cet espace de travail défini de manière idéale en fonction de seuls critères mathématiques. Son utilisateur est un individu expert « épistémique ». On peut donc également envisager cet espace comme l'ETG institutionnel de la communauté des mathématiciens.

ETG idoine. L'ETG de référence doit être aménagé et organisé pour devenir un espace de travail effectif et idoine dans une institution donnée avec une fonction définie. Cela suppose une réflexion sur la réorganisation didactique des composantes de l'espace de travail de référence. Son utilisateur premier reste un expert, mais il joue un rôle semblable à celui de l'architecte qui conçoit un espace de travail pour ses utilisateurs potentiels futurs. De fait, le choix de l'adjectif idoine suppose que cet espace est bien conçu et opérationnel pour les questions qu'on pose dans cette institution. Nous devrions en toute rigueur introduire d'abord l'idée d'un ETG institutionnel et poser ensuite la question de son caractère idoine.

ETG personnel. L'ETG idoine doit être utilisé par des étudiants mais aussi par leurs enseignants. Chacun se l'approprie et l'occupe avec ses connaissances mathématiques et ses capacités cognitives. Ces ETG sont ce que nous appelons des ETG personnels. Quand l'élève construit son espace de travail, il a tendance à écraser le pôle théorique pour se replier sur le dipôle espace-artefact plus évident et matériel. Il lui accorde ainsi une fonction de validation indépendamment de l'horizon visé. Le rôle de l'enseignant consistera à développer le référentiel théorique en précisant l'espace de travail le mieux adapté à la tâche qu'il propose aux élèves. Cela suppose qu'il ait lui-même une conscience claire de la nature des espaces de travail géométrique et cela nous renvoie à des problèmes de formation d'enseignants.

L'étude de ces différents espaces de travail nous semble utile pour comprendre les points de vue des élèves et les attentes de leurs professeurs comme peut l'illustrer un retour en termes d'ETG sur les exercices que nous avons présentés dans cet article.

7. Retour sur des exemples

Revenons brièvement sur certains des exemples mentionnés pour illustrer notre utilisation des ETG.

7.1. Exercice sur l'existence d'un triangle équilatéral (cf. 1.)

Dans cet exercice, l'étudiant conclut à la non-existence du triangle d'abord grâce à une expérience utilisant le compas dans un espace de travail dont le référentiel horizon est la Géométrie I. Il interprète sans doute la demande de justification non pas comme la fixation, par les auteurs du sujet, d'un horizon de type Géométrie II, mais comme l'attente d'un raisonnement : il met donc en œuvre un autre raisonnement (intégrant du numérique par la mesure de l'angle) sans changer de référentiel théorique.

7.2. Exercice de sixième sur une figure à main levée (cf. 4.1.)

Avant l'entrée en 6^e, les élèves ont été peu initiés, pour les énoncés de géométrie, au caractère dominant des informations textuelles sur celles données par le dessin (ce qui est une conséquence du changement de référentiel, de la Géométrie I à la Géométrie II). Ils ne peuvent donc spontanément intégrer cette règle d'usage dans leur espace de travail. En début de 6^e, l'ETG idoine pour cet exercice n'est pas encore construit, ce qui explique les résultats décevants.
Il est d'ailleurs intéressant de constater que les résultats obtenus par des élèves de 5^e (un an de plus dans la scolarité), sur le même exercice, sont assez différents et confirment la plus grande disponibilité d'un ETG idoine.

	Résultats 5^e 2002	Résultats 6^e 1998 Pour mémoire
Réponse attendue 6 cm	52 %	25 %
Longueur EB du dessin	25 %	40 %
Autres réponses	18 %	25 %
Non réponses	5 %	10 %

7.3. Exercice du collège sur les droites « presque » parallèles (cf. 4.2.)

Pour réussir cet exercice, il s'agit de ne pas sortir de l'espace de travail attendu, dont le référentiel est la Géométrie II. Il faut aussi posséder la connaissance suivante : en géométrie les conclusions ne sont licites que dans un cadre théorique fixé. Ce cadre définit la nature et le type des objets étudiés : en Géométrie I, les tracés sont les objets d'étude ; en Géométrie II, ils ne sont que des schémas des objets d'étude. Ainsi les droites sont parallèles en Géométrie I alors qu'elles ne le sont pas en Géométrie II. Pour sortir du caractère paradoxal et relativiste de cette conclusion, il nous parait astucieux d'autoriser l'expression « presque parallèles » qui acquiert un sens bien précis dans le cadre Géométrie I.

Conclusion

La géométrie élémentaire fait rencontrer un monde idéal avec un monde matériel par l'intermédiaire des objets géométriques. L'activité géométrique peut alors être conçue comme un travail qui va mettre en relation une formulation théorique et un contenu matérialisable dans l'espace réel grâce à un ensemble d'outils spécifiques.

Cette réflexion nous a conduits à introduire la notion d’espace de travail géométrique basée sur la mise en réseau de trois composantes : un espace réel et local, un référentiel théorique et enfin un ensemble d’artefacts.
Pour résoudre un problème de géométrie, l’expert dispose d’un espace de travail idoine. Cet ETG remplit deux conditions, d’une part, il permet de travailler dans la Géométrie correspondant à la problématique visée, d’autre part, cet ETG est bien construit dans le sens où ses différentes composantes sont maîtrisées et utilisées de manière valide. En d’autres termes, l’expert face à un problème peut reconnaître le paradigme géométrique utile pour la résolution, cela lui permet de l’interpréter et de le résoudre grâce à l’espace de travail de référence associé à ce paradigme. Lorsque le problème est posé, non plus à un expert idéal, mais à un individu réel (l’élève, l’étudiant ou le professeur), le traitement du problème va s’effectuer dans son ETG personnel. Ce dernier n’aura *a priori* ni la richesse ni la performance de l’ETG d’un expert.
Cette façon de décrire la situation nous permet de dégager un enjeu didactique global tel que nous le percevons dans notre cadre théorique. D’un cadre géométrique unique, nous sommes passés à plusieurs cadres dépendant de la Géométrie utilisée. Dans ces cadres, il est possible de résoudre des problèmes grâce à des ETG idoines. À cela s’ajoute la dimension personnelle due à un individu particulier travaillant dans son ETG personnel.
S’assurer que l’apprenant réorganise les diverses composantes de son ETG en un tout cohérent et opérationnel va constituer l’enjeu didactique. Cette question assez générale peut se décliner en un certain nombre de problèmes qui participent de l’enjeu didactique :

1. Le problème de l’existence d’un ETG idoine pour résoudre un problème ou plus généralement une classe de problèmes ;
2. Les malentendus pédagogiques dus à la diversité à la fois des ETG de référence et des ETG idoines ;
3. Le problème du développement individuel de l’ETG personnel.

Pour mener à bien ces diverses études et rendre compte des types d’ETG en précisant l’aspect de chacun, il faut noter qu’il est nécessaire de s’appuyer sur des approches qui relèvent des différents champs de la didactique des mathématiques tels qu’ils ont pu être développés depuis bientôt trente ans et qui se révèlent ici étonnamment complémentaires.

Bibliographie

CAVEING M. (1997) *La figure et le nombre,* Septentrion, Lille.

DHOMBRES J. et alii (1987) *Mathématiques au fil des âges*, Gauthier-Villars.

DUVAL R. (2005) Les conditions cognitives de l’apprentissage de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives,* **10**, 5-54.

FISCHBEIN E. (1987) *Intuition in Science and Mathematics. An Educational Approach*, Reidel.

FISCHBEIN E. (1993) The theory of figural concepts, *Educational Studies in Mathematics,* **24.2**, 139-162.

FISCHBEIN E. & MARIOTTI M.A. (1997) Defining in classroom activities, *Educational Studies in Mathematics,* **34.3**, 219-248.

GONSETH F. (1945-1955) *La géométrie et le problème de l’espace*, Éditions du Griffon, Lausanne.

HJELMSLEV J. (1939) La géométrie sensible, *L’enseignement mathématique,* 7-27 et 294-322, Genève.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2000), Formation des maîtres et paradigmes géométriques, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **20.1**, 89-116.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (1999) Sur un cadre conceptuel inspiré de Gonseth et destiné à étudier l'enseignement de la géométrie en formation des maîtres, *Educational Studies in Mathematics,* **40.3**, 283-312.

HOUDEMENT C., KUZNIAK A. (2003) Quand deux droites sont « à peu près » parallèles ou le versant géométrique du « presque » égal, *Petit x,* **61**, 61-74.

KAHANE J.P. dir (2002) *L’enseignement des sciences mathématiques*, Odile Jacob, Paris.

KUHN T.S. (1962) *The structure of scientific revolutions,* Trad *La structure des révolutions scientifiques,* 1983, Flammarion, Paris.

KUHN T.S. (1977) En repensant aux paradigmes, In *La tension essentielle,* Odile Jacob, Paris.

KUZNIAK A. (2003) *Paradigmes et espaces de travail géométriques,* Notes d’habilitation, IREM Université de Paris VII, Paris.

KUZNIAK A. (2006) Paradigmes et espaces de travail géométriques. Éléments d'un cadre théorique pour l'enseignement et la formation des enseignants en géométrie, *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education,* **6.2**, 167-187.

LAUTIER F. (1996) Les espaces du travail, In *Cazamian P et al (eds), Traité d'Ergonomie*, Octarès Éditions, Toulouse, 487-525.

MALAFOSSE D. (2002) Pertinence des notions de cadre de rationalité et de registre sémiotique en didactique de la physique, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* **22.1**, 31-76.

RABARDEL P. (1995) *Les hommes et les technologies,* Armand Colin.

SZABÓ Á. (1993) *Entfaltung der grieschischer Mathematik*, Traduction 2000 *L'aube des mathématiques grecques*, Vrin, Paris.

WITTGENSTEIN L. (1964) 1975 *Remarques philosophiques*, Gallimard.

CATHERINE HOUDEMENT
IUFM de Haute Normandie et Equipe DIDIREM Université Paris VII
catherine.houdement@rouen.iufm.fr

ALAIN KUZNIAK
IUFM Orléans-Tours et Equipe DIDIREM Université Paris VII
alain.kuzniak@orleans-tours.iufm.fr